Dans tout le problème, on considère une sphère **S** de centre O. Le rayon de **S** est 1 dans les questions 1 à 12, puis **S** représente la Terre dans l'exemple numérique (questions 13 à 19).

Les points de la sphère peuvent être représentés par leurs coordonnées sphériques θ et φ, φ représentant la latitude, ou par leurs coordonnées cartésiennes x, y, z, la correspondance se faisant par:

$$x = \cos\theta \cos\varphi , \quad y = \sin\theta \cos\varphi , \quad z = \sin\varphi .$$

1. Etant donnés deux points de la sphère, $P : \theta_P, \varphi_P$ et $Q : \theta_Q, \varphi_Q$, donner une expression du cosinus de l'angle des vecteurs $(\vec{OP}, \vec{OQ})$, en fonction de $\theta_P, \varphi_P, \theta_Q, \varphi_Q$.

2. Donner des conditions nécessaires et suffisantes en termes de leurs coordonnées sphériques pour que P et Q soient :

* diamétralement opposés sur **S**,
* confondus.

3. On notera d(M,N) pour deux points M et N de **S**, la fonction $\text{Arccos}(\vec{OM}.\vec{ON})$. Vérifier que d est une ***distance*** , autrement dit qu'elle vérifie les relations:

* $d(M,N) \geq 0$ avec égalité si et seulement si M = N
* $d(M,N) = d(N,M)$
* $d(M,N)+d(N,P) \geq d(M,P)$ pour tous points M, N,P de **S**.

4. Donner une équation cartésienne du plan **P** passant par O, P et Q quand ces points ne sont pas alignés.

5. Donner un vecteur unitaire $\vec{w}$ normal à ce plan **P**.

6. On suppose que $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à l'axe Oz. On considère le point H de coordonnée z maximum du cercle **C**, intersection de **P** et de **S**.

A l'aide de $\vec{w}$, du vecteur $\vec{e_3}$ de coordonnées (0,0,1) et de $a = \vec{e_3} . \vec{w}$, donner le vecteur $\vec{OH}$.

7. Quel est le cercle **C** si $\vec{w}$ est colinéaire de l'axe Oz ?

Soit M un point de **S** hors de Oz. Le plan tangent en M à **S** est rapporté à la base orthonormale directe $\vec{u_M}$, $\vec{v_M}$ tel que :

* $\vec{u_M}$ soit dans le plan défini par Oz et M, et fasse avec le vecteur $\vec{e_3}$ un angle aigu.
* $\vec{u_M}$, $\vec{v_M}$, $\vec{MO}$ soit une base orthonormée directe de l'espace.

8. Exprimer les coordonnées cartésiennes de $\vec{u_M}$ et $\vec{v_M}$ à partir des coordonnées sphériques de M.

Si $\vec{T}$ est un vecteur non nul, tangent en M à **S** (avec M hors de l'axe Oz), le ***cap*** α de $\vec{T}$ est la mesure (de 0 à 360 degrés) de l'angle $(\vec{u_M}, \vec{T})$.

9. Donner le cap du vecteur tangent en P au petit arc de **C** qui va de P vers Q (pour O, P, Q non alignés).

On considère une courbe Γ tracée sur la sphère, donnée paramétriquement par l'application $t \longmapsto M(t)$ de l'intervalle réel $I = [0,1]$ dans **S** ; le point M(t) est défini par les coordonnées sphériques $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, où θ et φ sont deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I.

10. Montrer que la longueur de cette courbe est

$$L = \int_0^1 \sqrt{\varphi'(t)^2 + \cos^2(\varphi(t))\theta'(t)^2}\, dt$$

11. On suppose à présent que le vecteur M'(t) ne s'annule pas et garde un cap α constant sur l'intervalle I. Une telle courbe est appelée ***loxodromie***.

Pour quelles valeurs de α la loxodromie est-elle contenue dans un parallèle (φ constant) ou un méridien (θ constant) ?

12. Vérifier que si α n'est ni 90 ni 270, la longitude θ se calcule en fonction de la latitude φ par $\theta = \theta_0 + \tan\alpha \operatorname{Argth}(\sin\varphi)$.

Calculer les valeurs de α et de θ_0 donnant une loxodromie passant par P et Q, et les longueurs des arcs de loxodromie entre P et Q correspondants.

Exemple numérique : **S** représente la Terre, dont le rayon est 6370 km. P représente Paris et Q Québec. Les coordonnées sphériques sont (en degrés) : $\theta_P = 2.5$, $\varphi_P = 49$ et $\theta_Q = -71$, $\varphi_Q = 47$.

13. Quelle est la longueur (en kilomètres) du petit arc du cercle **C** qui joint P à Q ?

14. Evaluer numériquement dans le cas de Paris et Québec, le cap du vecteur tangent en P au petit arc de **C** qui va de P vers Q.

15. Préciser le point de latitude maximum sur cet arc.

16. Quelle est la longueur (en kilomètres) de la plus courte loxodromie joignant Paris à Québec ?

17. Comparer cette longueur à celle de l'arc de cercle **C**.

18. Reconnaître la courbe tracée sur **S** définie par:

$\varphi = F(\theta)$ avec $F(\theta) = \arctan(\tan(\alpha)\sin(\theta))$

où α est un réel de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

19. Calculer l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{F'(\theta)^2 + \cos^2(F(\theta))}\,d\theta.$$

Fin du Problème de l'E.M.S St CYR

4) Calculer les sommes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.

Pour $a = 0$, obtient-on les valeurs trouvées au I-4-a ? Justifier.

5) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$, en utilisant un procédé analogue.